

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

HORMIGÓN I (74.01 y 94.01)

**ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE  
INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO**

**Parte 1**

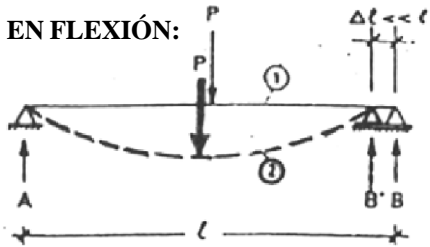
FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Descripción del problema

CASO 1) Entre causas y efectos existe una relación lineal  
Cálculo lineal

- Material elástico lineal
- Pequeños desplazamientos

**EN FLEXIÓN:**



Leonhardt - "ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO" -  
TOMO I - Fig. 10-1

Para ángulos  $\tau$  pequeños  
 $B \cong B' \cong Q_B$   
 $N'_B \cong 0$

Despreciamos los "efectos de 2° orden"

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

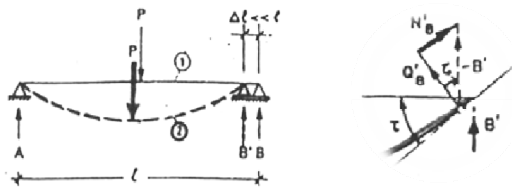
Lámina 2

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Descripción del problema

**CASO 2) Entre causas y efectos no existe una relación lineal**  
Cálculo no-lineal

- Material NO es elástico lineal → no linealidad material
- Desplazamientos NO son pequeños o la incidencia de los mismos en las solicitaciones NO es despreciable → no linealidad geométrica



$N'_B \neq 0$

Leonhardt - "ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO" - TOMO I - Fig. 10-1

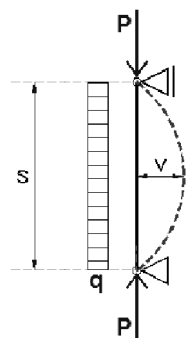
**NO se pueden despreciar los "efectos de 2° orden"**  
→ El equilibrio debe plantearse en el sistema deformado

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 3

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Descripción del problema

**COLUMNA EN FLEXO-COMPRESIÓN:**



El sistema es estable?

La inestabilidad global de un sistema estructural está asociada al colapso del sistema.

↓

**Estado Límite Último de Inestabilidad del Equilibrio**

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 4

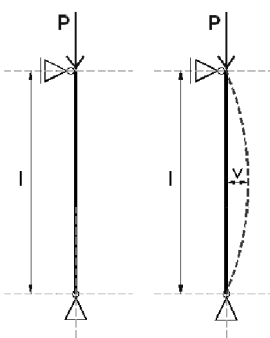
FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

## Marco Teórico

### Euler (1744)

*Materiales Ideales*

Compresión centrada



COMPRESIÓN CENTRADA  
BARRA BIARTICULADA  
MATERIAL ELÁSTICO IDEAL

ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA PEQUEÑAS DEFORMACIONES:

$\chi = \frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2v}{dx^2}$

$-M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2}$

CURVATURA

(Convención de signos Argentina: M positivo cuando la deflexión es negativa)

EN ESTE CASO :

$M^A = -M + P v = 0$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

$\Rightarrow EI \frac{d^2v}{dx^2} + P v = 0$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$k^2 = \frac{P}{EI}$

$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$

Bibliografía: "Resistencia de Materiales", Timoshenko

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

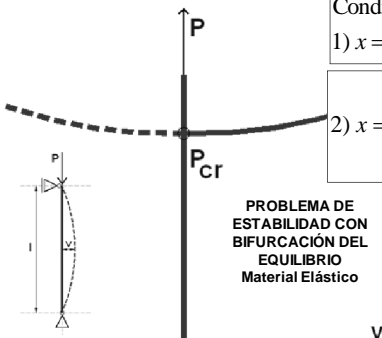
Lámina 5

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

## Marco Teórico

### Euler (1744)

*Materiales Ideales*



PROBLEMA DE ESTABILIDAD CON BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO  
Material Elástico

$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$       $k^2 = \frac{P}{EI}$

Condic. de Borde

1)  $x=0; v=0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow v_{(x)} = C_1 \sin kx$

2)  $x=l; v=0 \Rightarrow$ 

{

2a)  $C_1 = 0 \rightarrow$  solución trivial

2b)  $\sin kl = 0 \Rightarrow k l = n \pi$  ( $n=1,2,3,\dots$ )

ECUACIÓN DE PANDEO

$\Rightarrow P = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE EULER

$\Rightarrow P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

Material Elastoplástico ideal  
TAMBIÉN  
PROBLEMA DE ESTABILIDAD CON BIFURCACIÓN  
DEL EQUILIBRIO

EL VALOR DE  $P_{cr}$  SERÁ DISTINTO

Bibliografía: "Resistencia de Materiales", Timoshenko

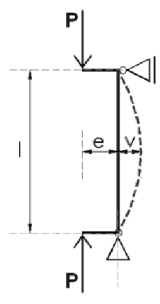
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 6

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### Marco Teórico

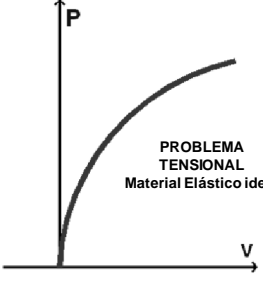
#### Compresión excéntrica



$$EI \cdot \frac{d^2v}{dx^2} + P \cdot v + M_{ext} = 0$$

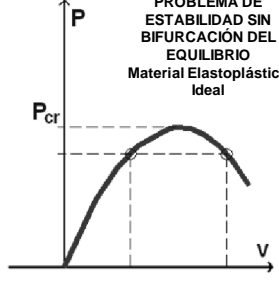
$$v = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cdot \cos kx + f(M_{ext} / EI)$$

COMPRESIÓN EXCÉNTRICA  
MATERIAL ELÁSTICO IDEAL



PROBLEMA TENSIONAL  
Material Elástico ideal

COMPRESIÓN EXCÉNTRICA  
MATERIAL ELASTOPLÁSTICO IDEAL



PROBLEMA DE ESTABILIDAD SIN BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO  
Material Elastoplástico Ideal

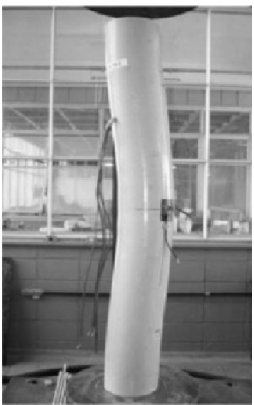
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 7


FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### Qué parámetros inciden sobre la Carga Crítica?

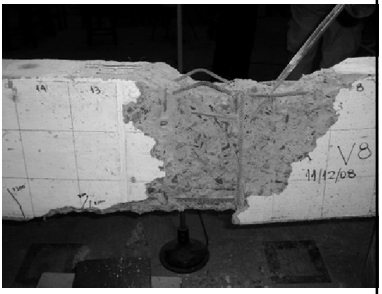
- El tipo de sollicitación
- La geometría de la sección
- El material!!



Columna tubular de acero  
Foto: Rul Carneiro de Barros, Tesis doctoral, 1983



Columna hormigón armado  
Foto: Awati & Khadiranaikar, Engineering Structures, Vol 37, pp76-87, 2012



Pandeo de barras de armadura  
Ensayo FIUBA – 28-10-2009

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 8

4

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### Qué parámetros inciden?

*Materiales y Vínculos Ideales*

- Los vínculos

$l_e = l$

$$P_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l_e^2}$$

$l_e = 2l$

$l_e = l$

$l_e = 0.70l$

$l_e = 0.50l$

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

$l_e$  : longitud efectiva, distancia entre puntos de inflexión de la configuración de pandeo

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 9

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### Qué parámetros inciden?

- La esbeltez

Esbeltez aumenta

↓

Carga crítica disminuye!!

Gran Esbeltez

Pequeña Esbeltez


FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 10

5

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

## EFECTOS DE 2° ORDEN EN ELEMENTOS COMPRIMIDOS DE HORMIGÓN ARMADO



- No es elasto-plástico "ideal"
- Material compuesto de complejo comportamiento
- No existen vínculos ideales
- Siempre existen imperfecciones y/o excentricidades

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 11

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

### DEFINICIÓN DE ESBELTEZ:

Esbeltez Geométrica:  $\lambda_{geom} = \frac{l}{d_p}$ 
{

 $l$ : Longitud del elemento  
 $d_p$ : Dimensión de la columna paralela al plano de pandeo

**ESBELTEZ MECÁNICA:**  $\lambda_m = \frac{l}{r}$

$r$ : Radio de giro de la sección;  $r = \sqrt{\frac{I_g}{A_g}}$ 
{

 $I_g$ : Momento de inercia de la columna  
 $A_g$ : Area de la columna

Sección rectangular:  $r = \sqrt{\frac{b h^3}{12} \frac{1}{b h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} \cong 0.30 h$

**EN EL CÁLCULO:  $l = l_e$**

$l_e$ : Longitud de pandeo o longitud efectiva, depende de las condiciones de vínculo.  
 Se obtiene multiplicando la longitud sin arriostramientos  $l_u$  por un coeficiente  $k$ .

$l_e = k l_u$

$\lambda_m = \frac{k l_u}{r}$

ESBELTEZ

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 12

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

$$\lambda_m = \frac{k l_u}{r}$$

### ESBELTEZ

$l_u$  : Longitud sin arriostramientos

Distancia libre entre losas de entrepiso, vigas u otros elementos capaces de proporcionarle apoyo lateral en la dirección considerada.

Cuando existan capiteles, ábacos o cartelas en las columnas, la longitud,  $l_u$  debe ser medida hasta el extremo inferior del capitel, ábaco o cartela, en el plano considerado.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 13

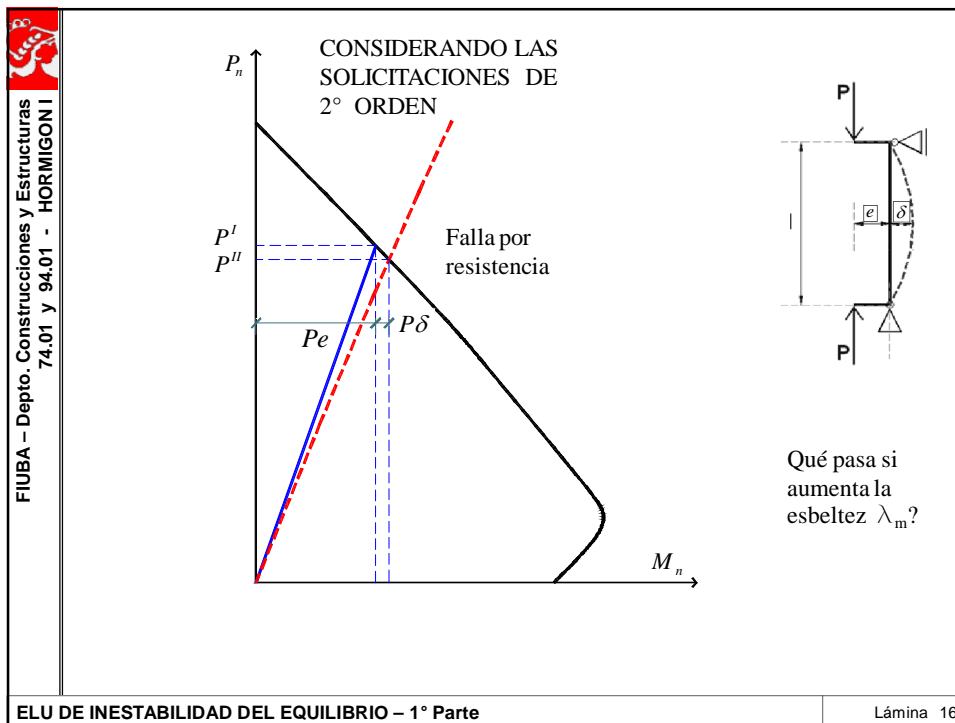
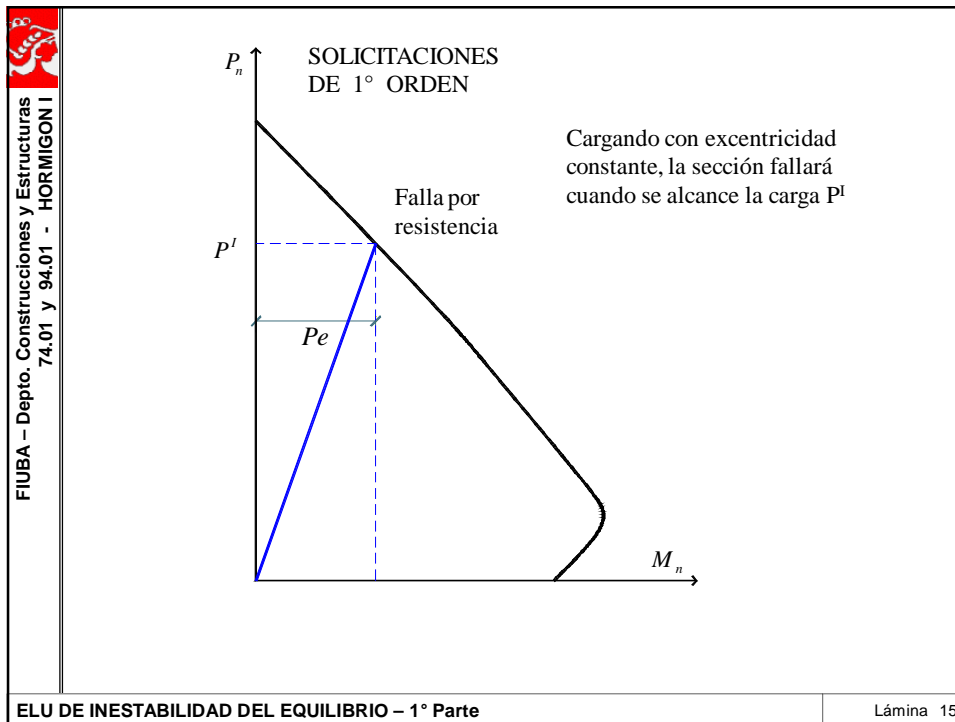
FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

El comportamiento del Hormigón es similar al del material elastoplástico ideal

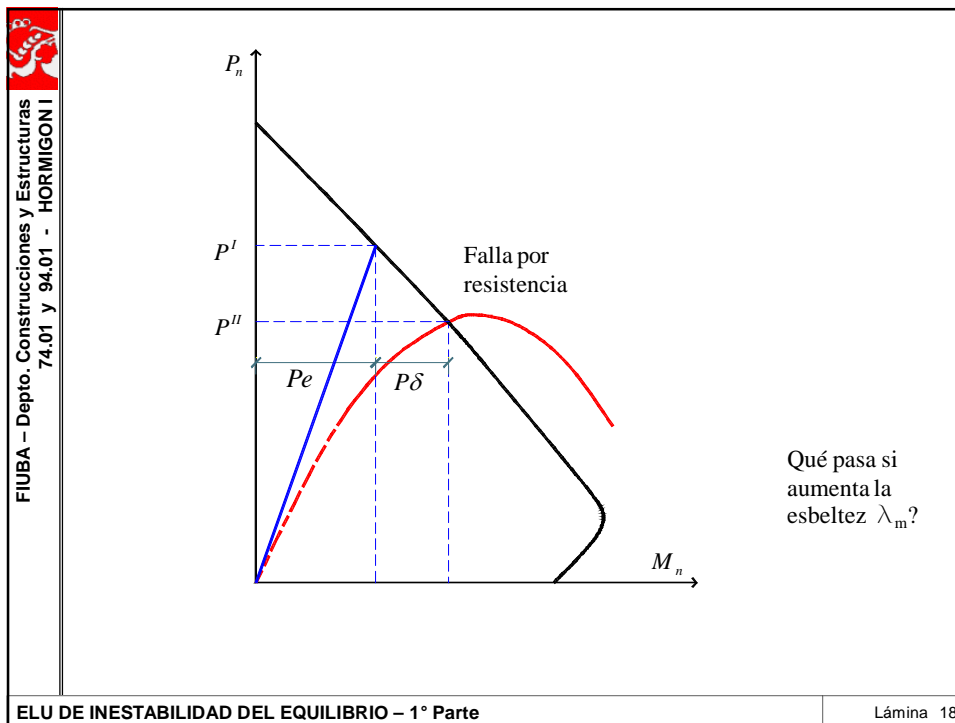
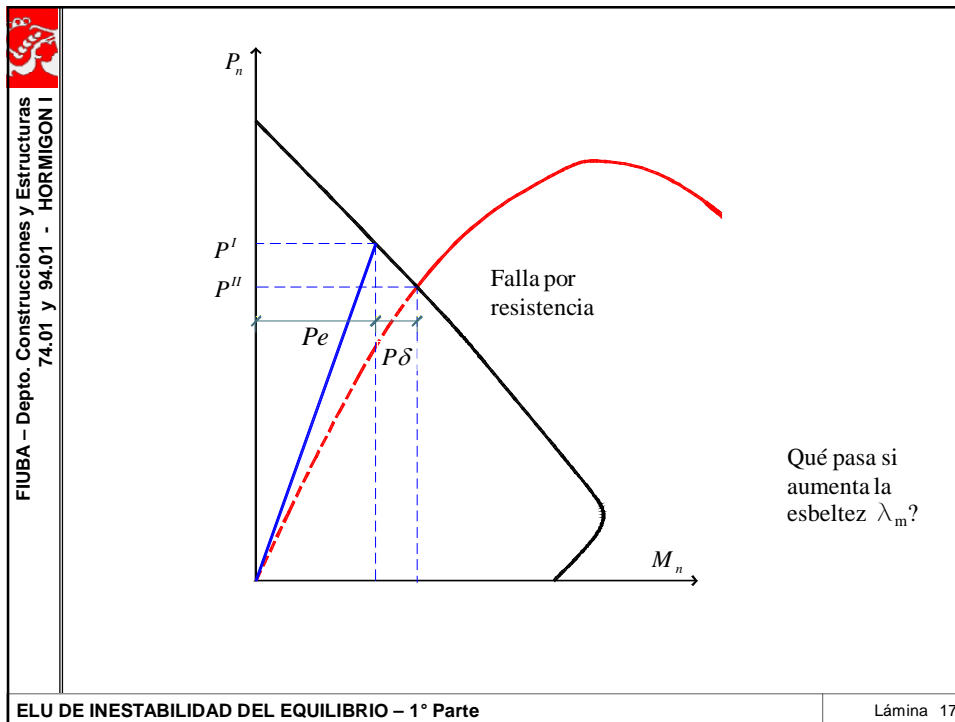
**PROBLEMA DE ESTABILIDAD SIN BIFURCACIÓN DEL EQUILIBRIO**

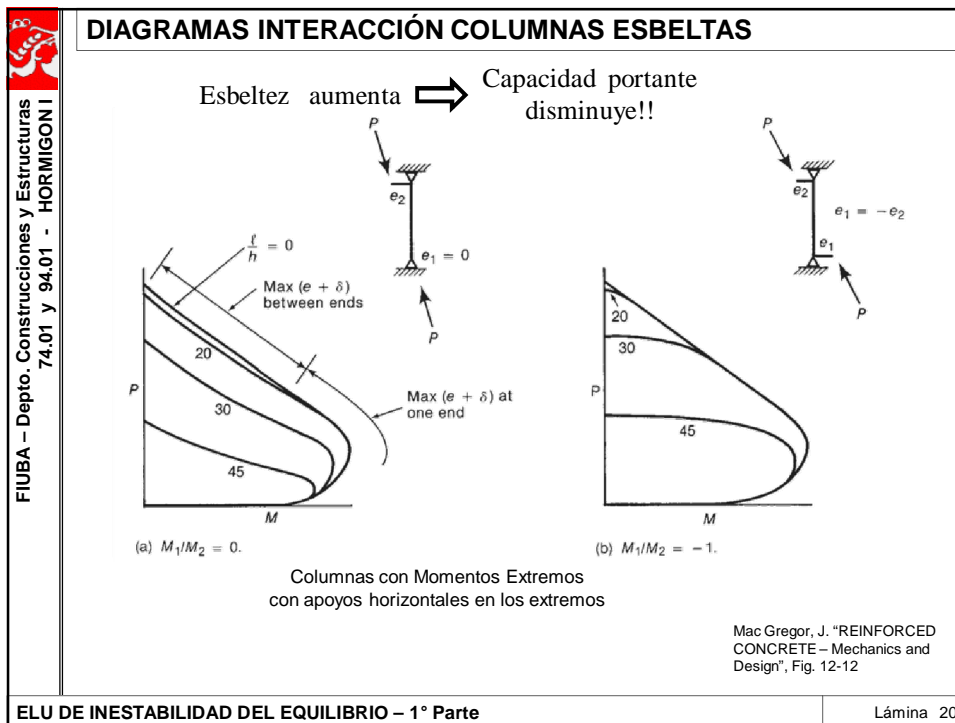
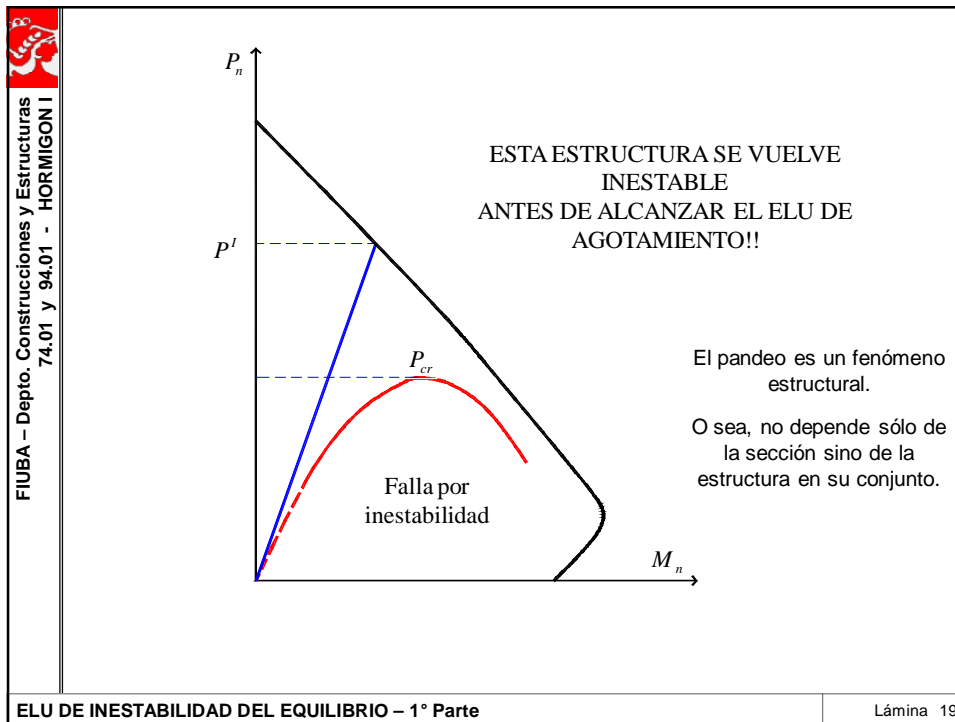
RAMA ESTABLE    RAMA INESTABLE  
PROBLEMA TENSIONAL

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte
Lámina 14









FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

### Proceso de Dimensionamiento

**1) CONDICIÓN DE ESTABILIDAD** ⇒ **ELU INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO**

- VERIFICACIÓN DE ACUERDO A TEORÍA DE 2° ORDEN
- VERIFICACIÓN UTILIZANDO PROCEDIMIENTOS SIMPLIFICADOS

**2) CONDICIÓN DE RESISTENCIA** ⇒ **ELU AGOTAMIENTO A FLEXOCOMPRESIÓN**

**COLUMNA ESBELTA:**

Se denomina "columna esbelta" a aquellas columnas en las que se produce una reducción significativa (aprox. 5%) de su capacidad resistente a esfuerzo normal debido a momentos que resultan de las deformaciones laterales de la columna.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 21

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

### CÁLCULO SEGÚN TEORÍA DE 2° ORDEN

**VERIFICACIÓN DE LA ESTABILIDAD**

- Cargar la estructura (sin deformar) con Cargas Mayoradas y un coeficiente de reducción de rigidez  $\phi_k \cong 0.80$
- Calcular las deformaciones  $\delta_1$
- Cargar la estructura deformada 1 con Cargas Mayoradas
- Calcular las deformaciones  $\delta_2$

Puede suceder que no haya convergencia!!

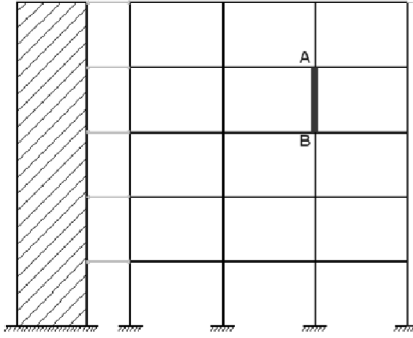
**VERIFICACIÓN DE RESISTENCIA**  
DIMENSIONAMIENTO DE ARMADURAS

$$\begin{cases} N_d = \phi N_n \geq N_u \\ M_d = \phi M_n \geq M_u \end{cases}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 22

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGON I	<b>CÁLCULO SEGÚN TEORÍA DE 2° ORDEN</b>	Alternativa: <b>ANÁLISIS ELÁSTICO +          EL MÉTODO DE LA          AMPLIFICACIÓN DE          MOMENTOS</b>
	<p>Iterativo y engorroso.....</p> <p><b>No es fácil determinar las deformaciones.....</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>➢ comportamiento no lineal del material,</li> <li>➢ comportamiento distinto a compresión y a tracción,</li> <li>➢ fisuración que incide en las rigideces,</li> <li>➢ fluencia lenta,</li> <li>➢ excentricidades constructivas, etc.</li> </ul> <p>El reglamento establece <b>dos limitaciones</b> para su utilización:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Las dimensiones en la estructura definitiva no pueden diferir en más del 10 % de las dimensiones adoptadas en el análisis estructural.</li> <li>2. Se debe demostrar que se obtienen valores de las cargas últimas dentro de un margen de <math>\pm 15</math> % con respecto a las obtenidas mediante ensayos !!!</li> </ol>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="font-size: 3em; margin-right: 10px;">}</div> <div> <p>1) PÓRTICOS INDESPLAZABLES</p> <p>2) PÓRTICOS DESPLAZABLES</p> </div> </div> <p>Análisis elástico de 1° orden: para tener en cuenta la existencia de fisuración, reducir rigideces:</p> <p>Vigas: 0.35 Ig</p> <p>Columnas: 0.70 Ig</p> <p>Placas y losas planas: 0.25 Ig</p>
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte		Lámina 23

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGON I	<b>SISTEMAS INDESPLAZABLES</b>	<b>SUS NUDOS SE ENCUENTRAN          IMPOSIBILITADOS DE MOVERSE          HORIZONTALMENTE.</b>
		<p>→ESTÁN VINCULADOS A ELEMENTOS ESTRUCTURALES QUE ABSORBEN LAS FUERZAS HORIZONTALES.</p> <p>Si no resulta claro, verificar alguna de estas condiciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Una columna de una estructura se puede suponer como indesplazable, si el incremento en los momentos extremos de la columna, debido a los efectos de segundo orden, es igual o menor que el 5 % de los momentos extremos de primer orden.</li> <li>- Cuando todas las columnas del piso tengan igual altura, un entrepiso de la estructura se podrá suponer como indesplazable, si se verifica que:</li> </ul> $Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_{us} l_c} \leq 0.05$
<p><math>\sum P_u</math>: Carga vertical mayorada total</p> <p><math>V_{us}</math>: Esfuerzo de corte horizontal en el piso considerado</p> <p><math>\Delta_o</math>: Desplazamiento relativo de 1° orden entre la parte superior e inferior del entrepiso debido a <math>V_{us}</math></p> <p><math>l_c</math>: Longitud del elemento comprimido de un pórtico, medida entre los ejes de los nudos del pórtico</p>	ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte	
		Lámina 24

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### SISTEMAS INDESPLAZABLES

$I_b$  : Momento de Inercia de las Vigas  
 $I_c$  : Momento de Inercia de la Columna

$I_b \approx I_c$     $I_b \approx I_c$     $I_b \gg I_c$

$I_e = I_c$     $I_e = 0.7 I_c$     $I_e = 0.5 I_c$

$I_b \approx I_c$     $I_b \gg I_c$     $I_b \gg I_c$

EN SISTEMAS INDESPLAZABLES

$l_e \leq l_c$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 25

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

### SISTEMAS DESPLAZABLES

$l_e = 2 l_c$     $I_b \approx \infty$     $l_e = 2 l_c$     $I_b$     $l_e \geq 2 l_c$

$I_b \approx \infty$     $l_e = l_c$     $I_b$     $l_e \geq l_c$

EN SISTEMAS DESPLAZABLES

$l_e \geq l_c$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 1° Parte

Lámina 26

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Coefficientes de rigidez relativa

$I_b$  : Momento de Inercia de las Vigas ( $0.35I_{gb}$ )  
 $I_c$  : Momento de Inercia de la Columna ( $0.70I_{gc}$ )

$$\psi_A = \frac{\frac{E_c I_{c1}}{l_{c1}} + \frac{E_c I_{c2}}{l_{c2}}}{\frac{E_b I_{b1}}{l_1} + \frac{E_b I_{b2}}{l_2}}$$

Se recomienda una reducción de rigidez del 50% en el caso de extremos articulados de vigas o columnas

$$\psi_B = \frac{\frac{E_c I_{c1}}{l_{c1}} + \frac{E_c I_{c2}}{l_{c2}}}{0.5 \frac{E_b I_{b1}}{l_1} + \frac{E_b I_{b2}}{l_2}}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 27

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Longitud efectiva  $l_e$  en columnas de **Sistemas Indesplazables**

$$l_e = k l_u$$

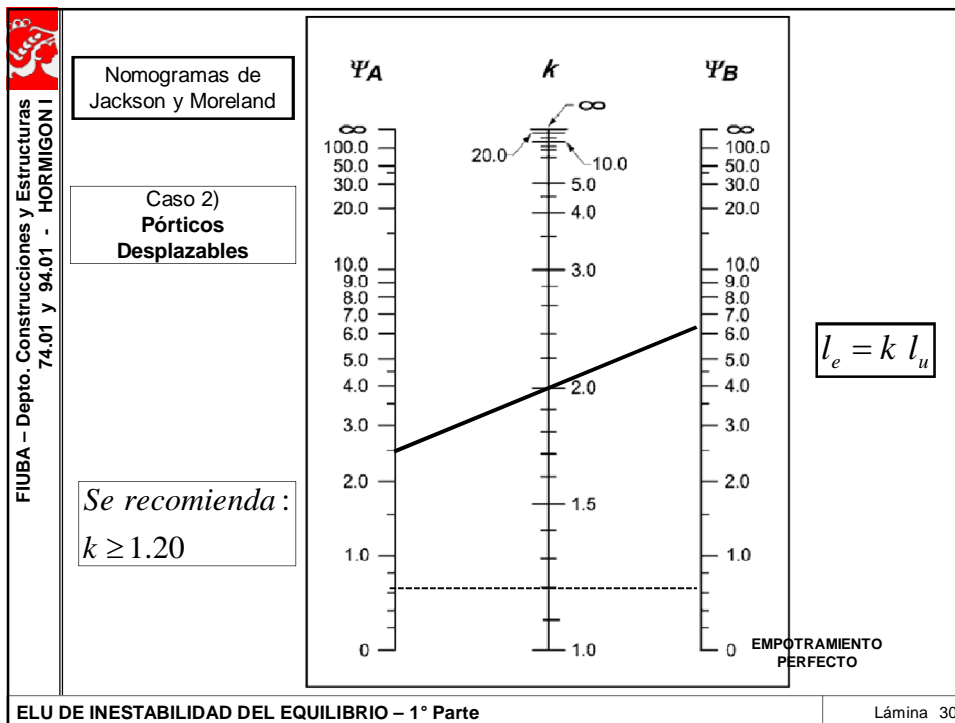
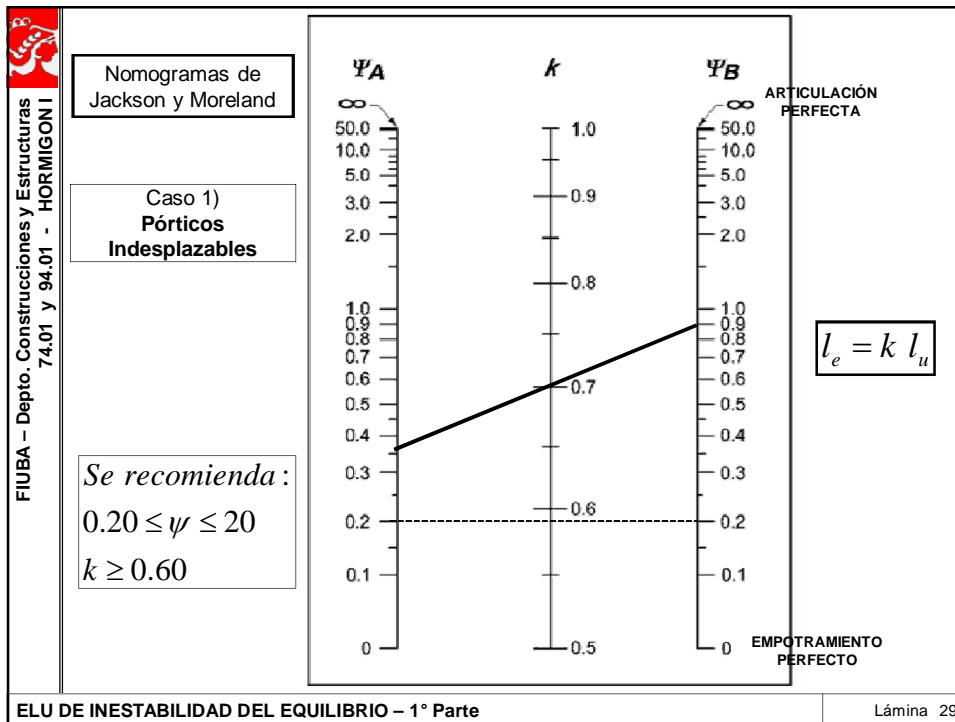
Tres alternativas:

1. Puede adoptarse  $k=1 \Rightarrow l_e = l_u$
2. Puede evaluarse  $k$  por medio de los nomogramas de Jackson y Moreland
3. Puede evaluarse  $k$  mediante la siguiente expresión:

$$k = 1 - \frac{1}{(5+9 \psi_A)} - \frac{1}{(5+9 \psi_B)} - \frac{1}{(10+\psi_A \psi_B)}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 1° Parte

Lámina 28





FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras  
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

FIN –  
ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE  
INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO  
Parte 1

GRACIAS POR SU ATENCION !!!