

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

HORMIGÓN I (74.01 y 94.01)

ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Parte 2

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

Momentos de 2° orden

Se distinguen 2 tipos diferentes de momentos de segundo orden que pueden actuar en una columna:

1. **Momentos $P-\delta$** : Son el resultado de las deflexiones del eje de la columna que ocurren lejos de los extremos de la columna.
2. **Momentos $P-\Delta$** : Son el resultado de los desplazamientos laterales de los nudos.

INDESPLAZABLE

DESPLAZABLE

Proceso de Dimensionamiento

1) CONDICIÓN DE ESTABILIDAD	⇒	ELU INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO
2) CONDICIÓN DE RESISTENCIA	⇒	ELU AGOTAMIENTO A FLEXOCOMPRESIÓN

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte
Lámina 2

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Método de los Momentos Amplificados – BARRAS BIARTICULADAS

Deformac. de 1º orden Deformac. de 2º orden

$M_o = Pe$ δM $M_c = M_o + P\delta$

Aplicando el Método de Área de Momentos, considerando que la distribución de deformaciones es una semi onda senoidal, y por lo tanto la de momentos adicionales, también, se obtiene:

$$\text{Area} \frac{M_o}{EI} \int_A^B = \frac{M_o l}{EI 2} ; y_{\xi \frac{M_o}{EI}} \int_A^B = \frac{l}{4} \Rightarrow \delta_0 = \frac{M_o l^2}{EI 8}$$

$$\text{Area} \frac{\delta M}{EI} \int_A^B = \left(\frac{P}{EI} (\delta_0 + \delta_a) \right) \frac{l 2}{2 \pi} ; y_{\xi \frac{\delta M}{EI}} \int_A^B = \frac{l}{\pi} \Rightarrow \delta_a = P \frac{l^2}{\pi^2 EI} (\delta_0 + \delta_a)$$

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \Rightarrow \delta_a = \frac{P}{P_E} (\delta_0 + \delta_a) \Rightarrow \delta_a = \frac{P}{(P_E - P)} \delta_0$$

2º teorema del Método de área de momentos:
La desviación de la tangente en un punto A sobre la curva elástica con respecto a la tangente prolongada desde otro punto B, es igual al momento del área bajo la curva M/EI entre los puntos Ay B con respecto a A. Esta desviación es igual a la deformación.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2º Parte

Lámina 3

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Método de los Momentos Amplificados – BARRAS BIARTICULADAS

$$\delta_a = \frac{P}{(P_E - P)} \delta_0 \Rightarrow \delta_{Tot} = \delta_0 + \delta_a = \frac{1}{1 - P/P_E} \delta_0$$

$$M_c = M_o + P \delta_{Tot} = M_o + \frac{P}{1 - P/P_E} \delta_0$$

$$\delta_0 = \frac{M_o l^2}{EI 8}$$

$$M_c = M_o + \frac{P}{1 - P/P_E} \frac{M_o l^2}{EI 8}$$

$$M_c = M_o + \frac{P}{1 - P/P_E} \left(\frac{\pi^2 EI / l^2}{P_E} \right) \frac{1 l^2}{EI 8} M_o$$

$$M_c = M_o + \frac{(\pi^2 / 8) P / P_E}{1 - P / P_E} M_o$$

$$M_c = \left(\frac{1 - P / P_E + (\pi^2 / 8) P / P_E}{1 - P / P_E} \right) M_o$$

$$M_c = \frac{(1 + 0.23 P / P_E)}{1 - P / P_E} M_o$$

$M_o = Pe$ δM $M_c = M_o + P\delta$

El coef. 0.23 se obtuvo para un M_o constante en toda la barra. Será distinto para otra forma del diagrama de momentos de 1º orden.

El numerador $(1 + \text{coef } P/P_E)$ varía entre 0.96 y 1.06 para distintos tipos de diagrama de M_o . En el Reglamento se toma igual a 1.

$$M_c = \frac{1}{1 - P / P_E} M_o$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2º Parte

Lámina 4

Método de los Momentos Amplificados – SISTEMAS INDESPLAZABLES

Incidencia de los momentos de borde

ATENCIÓN!!!

En columnas de sistemas indesplazables, puede suceder que los momentos de 1° orden extremos resulten mayores que los momentos amplificados en el tercio medio de la configuración de pandeo.

Depende de la magnitud de M1 y M2 y de la esbeltez.

Se debe dimensionar ambas secciones y adoptar armadura para el peor caso.

- 1) P+máxMc**
- 2) P+M2**

Especialmente si M1 y M2 son de distinto signo!!!

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte Lámina 5

Método de los Momentos Amplificados – SISTEMAS INDESPLAZABLES

Incidencia de los momentos de borde

Además, si M1 y M2 son de distinto signo:

Columna con doble curvatura

Este caso es más favorable!
Los momentos adicionales serán menores

Siempre que no existan cargas transversales.....

Columna con simple curvatura

Mac Gregor, J. "REINFORCED CONCRETE – Mechanics and Design" - Fig. 12-13

En columnas de Pórticos Indesplazables se tendrá en cuenta el efecto de la distribución de momentos de 1° orden al evaluar las sollicitaciones de 2° orden.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte Lámina 6

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGON I

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGON I

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Método de los Momentos Amplificados – SISTEMAS INDESPLAZABLES

Incidencia de los momentos de borde

M_1 : Es el **menor** momento (de 1° orden) mayorado, en uno de los extremos de un elemento comprimido. Se adopta como positivo si el elemento presenta curvatura simple, y negativo si tiene doble curvatura (momentos de distinto signo).

M_2 : Es el **MAYOR** momento (de 1° orden) mayorado, en uno de los extremos de un elemento comprimido. Se adopta SIEMPRE positivo.

Definición de M1 y M2

$$\left(\frac{M_1}{M_2} \right) < 0$$

$$\left(\frac{M_1}{M_2} \right) > 0$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 7

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Método de los Momentos Amplificados – SISTEMAS INDESPLAZABLES

- BARRA ARTICULADA EN AMBOS EXTREMOS
- SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE y ARMADURA LONGITUDINAL CONSTANTE
- LONGITUD = LONGITUD EFECTIVA DE LA COLUMNA REAL
- MOMENTO CONSTANTE, IGUAL A UN VALOR MEDIO EVALUADO DE MANERA TAL QUE EL MOMENTO MÁXIMO AMPLIFICADO DE LA COLUMNA EQUIVALENTE SEA IGUAL AL DE LA COLUMNA REAL
- SOLICITADA POR EL MISMO ESFUERZO AXIL QUE LA BARRA REAL

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 8

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Indesplazables

$k \leq 1$

1) Se debe realizar un análisis de 2° orden si

$\lambda_m = \frac{k l_u}{r} > 100$

El reglamento no impone un valor máximo de esbeltez

2) Se puede ignorar los efectos de 2° orden si se cumple:

$\lambda_m = \frac{k l_u}{r} \leq \lambda_{m,lim}$

⇒

Las solicitaciones debidas a las deformaciones son despreciables. Se verifica ELU de agotamiento a flexocompresión con las solicitaciones de 1° orden.

$$\lambda_{m,lim} \begin{cases} \text{si } M_1 = M_2 = 0 \rightarrow \lambda_{m,lim} = 22 \\ \text{si } 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \leq 40 \rightarrow \lambda_{m,lim} = 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \\ \text{si } 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) > 40 \rightarrow \lambda_{m,lim} = 40 \end{cases}$$

3) En todos los demás casos, se deben considerar los efectos de 2° orden y puede utilizarse el Método aproximado de los Momentos Amplificados.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 9

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Indesplazables

$\lambda_{m,lim} = 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \leq 40$

Si $\lambda_m \leq \lambda_{m,lim}$ las solicitaciones debidas a las deformaciones son despreciables. Se verifica ELU de agotamiento a flexocompresión con las solicitaciones de 1° orden.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 10

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Indesplazables

Método aproximado de los Momentos Amplificados

Momento amplificado $M_c = \delta_{ns} M_2$ $M_c = \frac{1}{1 - P/P_E} M_o$

El momento a amplificar, es el mayor de los momentos extremos, pero además en esta ecuación debe ser (para cada dirección):

$$M_2 \geq M_{2,\min} = P_u (15 + 0.03 h)$$

Factor de amplificación de momentos para pórticos indesplazables $\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0$

Carga crítica de Euler $P_c = \pi^2 \frac{EI}{l_e^2} = \pi^2 \frac{EI}{(k l_u)^2}$

Factor que relaciona el diagrama real de momentos con un diagrama equivalente de momentos uniforme $C_m = \begin{cases} 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 & \text{Si no existen cargas transversales entre los apoyos} \\ 1.0 & \text{Si existen cargas transversales entre los apoyos} \end{cases}$

El factor 0.75 que multiplica a P_c es el factor de reducción de rigidez: $\phi_k = 0.75$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte
Lámina 11

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Indesplazables

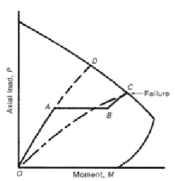
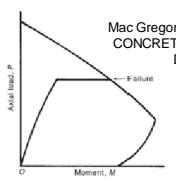
Carga crítica de Euler $P_c = \pi^2 \frac{EI}{(k l_u)^2}$

EI debería ser la rigidez de la columna al momento de la falla, de acuerdo con su carga normal, su esbeltez, y considerando la fisuración, la fluencia y la no linealidad del material. No es fácil de evaluar!!!!

$$\beta_d = \frac{P_u^D + 0.20 P_u^L}{P_u}$$

Es la relación entre la carga permanente y la total

$$EI = \begin{cases} \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_d} \\ \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta_d} \end{cases}$$

Mac Gregor, J. "REINFORCED CONCRETE – Mechanics and Design" - Fig. 12-15

E_c : Módulo de Elasticidad del hormigón de la columna $E_c = 4700 \sqrt{f'_c}$

I_g : Momento de inercia baricéntrico correspondiente a la sección bruta de la columna

E_s : Módulo de Elasticidad del acero de la armadura de la columna $E_s = 200000 \text{MPa}$

I_{se} : Momento de inercia de la armadura de la columna con respecto al eje baricéntrico de la sección bruta de la columna

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte
Lámina 12

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Indesplazables

Momento mínimo a amplificar:

Se exige una excentricidad mínima, tal que: $M_2 \geq M_{2,min} = P_u (15 + 0.03 h)$

Si no se cumple:

<p>$M_2=0$ $M_1=0$</p> <p>$\lambda_{m,lim} = 22$</p> <p>$M_c = \delta_{ns} M_{2,min}$</p> <p>$C_m = 1$</p> <p>Columnas sin momento de 1° orden</p>	<p>$M_2=M_1$ M_1</p> <p>$\lambda_{m,lim} = 22$</p> <p>$M_c = \delta_{ns} M_{2,min}$</p> <p>$C_m = 1$</p>	<p>M_2 M_1</p> <p>$\lambda_{m,lim} = 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \leq 40$</p> <p>$M_c = \delta_{ns} M_{2,min}$</p> <p>$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$</p>	<p>M_2 $-M_1$</p> <p>$\lambda_{m,lim} = 34 - 12 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) \leq 40$</p> <p>$M_c = \delta_{ns} M_{2,min}$</p> <p>$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$</p> <p>Columnas con doble curvatura</p>
---	---	--	---

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 13

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

DIAGRAMAS MOMENTO CURVATURA

Curvatura

$$\chi = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Curvatura normalizada

$$\bar{\chi} = \chi h = (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

Axial load resistance, F_n

Moment resistance, M_n

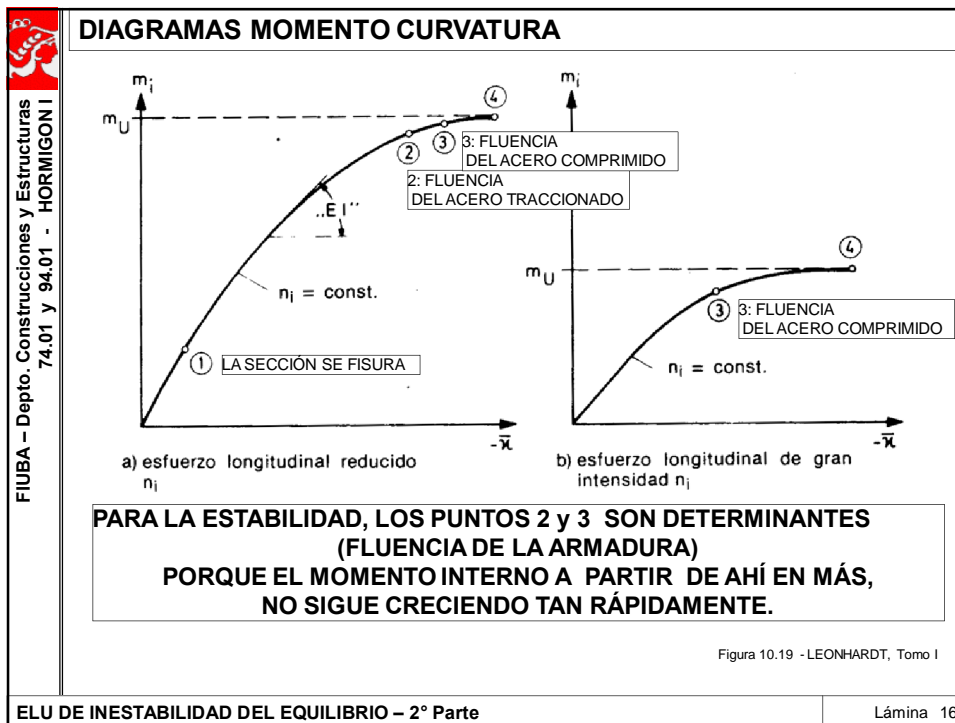
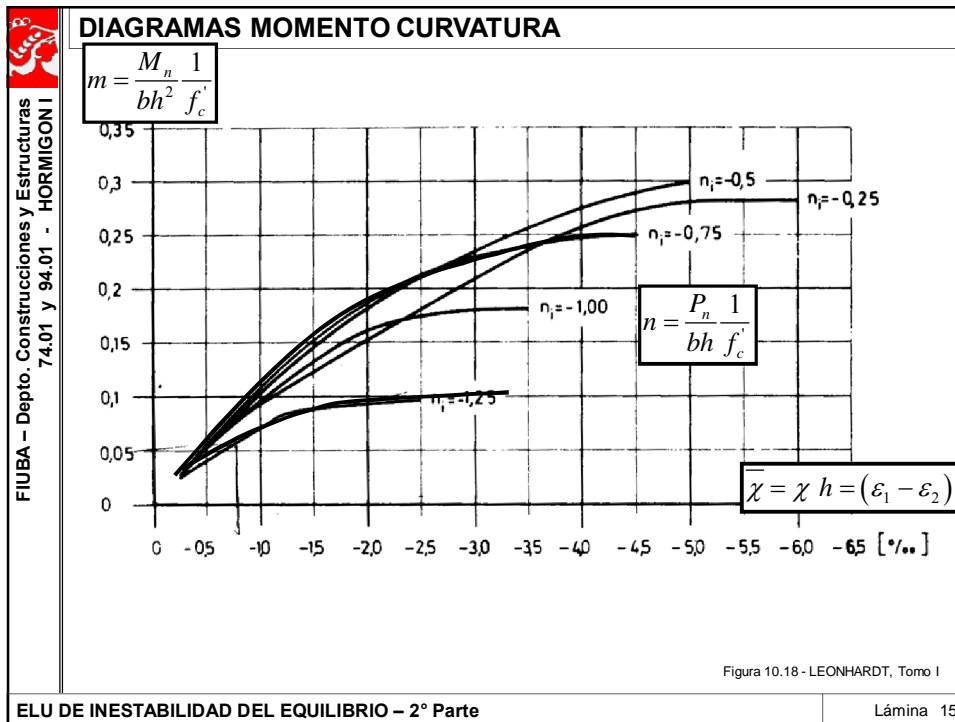
Uniform compression

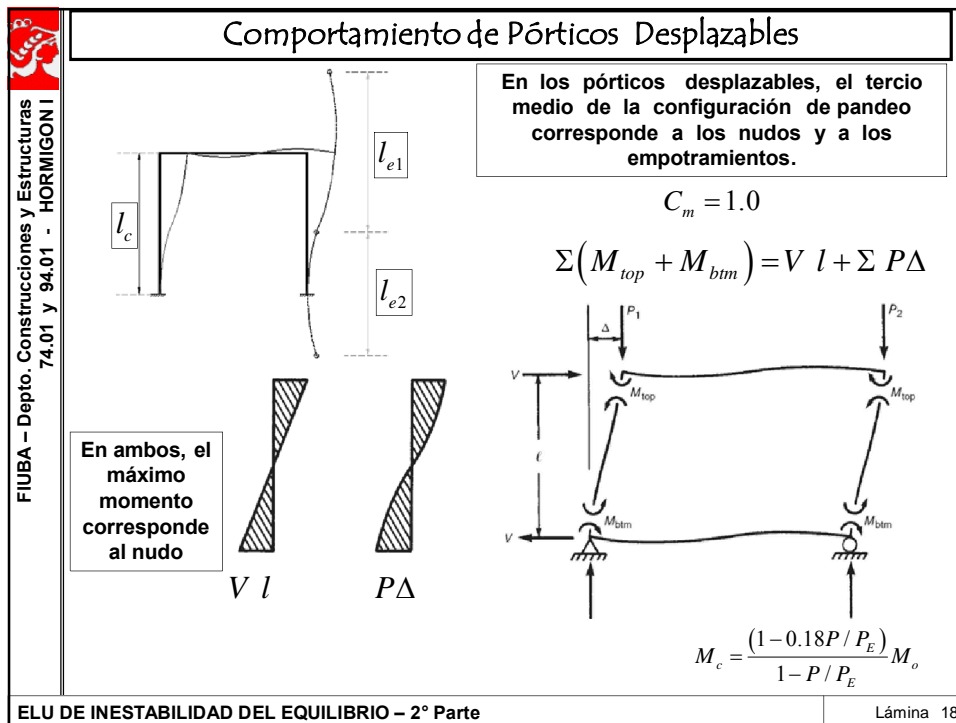
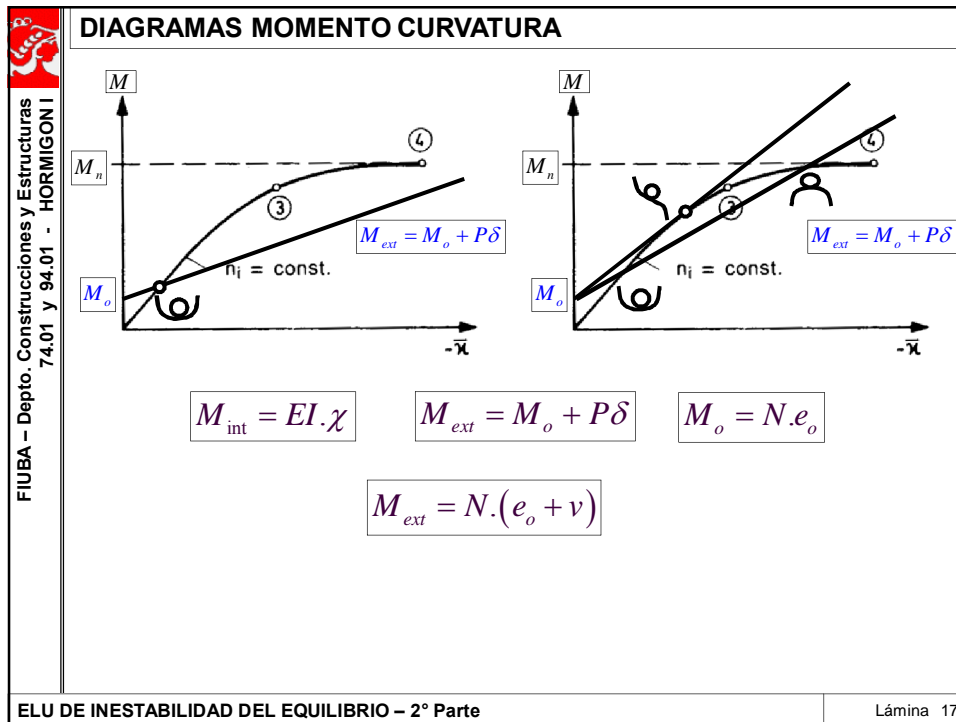
Balanced failure

Fig. 11-13
Wight MacGregor, "Reinforced Concrete Mechanics and Design"

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 14

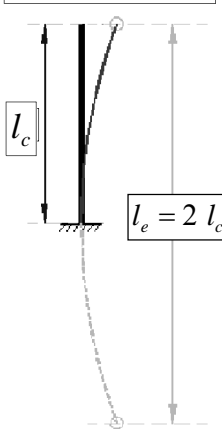




FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Comportamiento de Pórticos Desplazables

COLUMNA EMPOTRADA



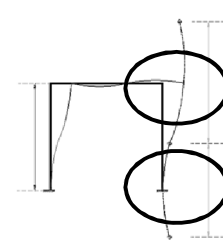
$l_e = 2 l_c$

SI LA COLUMNA ES ESBELTA, SE DEBERÁ CALCULAR M^I

ATENCIÓN: CUANDO SE DIMENSIONE LA FUNDACIÓN, POR EQUILIBRIO DEL NUDO, SE DEBERÁ CONSIDERAR TAMBIÉN ESE M^I

ATENCIÓN: CUANDO SE DIMENSIONE EL TRAVESAÑO, POR EQUILIBRIO DEL NUDO, SE DEBERÁ CONSIDERAR TAMBIÉN ESE M^I

ATENCIÓN: CUANDO SE DIMENSIONE LA FUNDACIÓN, POR EQUILIBRIO DEL NUDO, SE DEBERÁ CONSIDERAR TAMBIÉN ESE M^I



ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 19

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Desplazables

$k > 1$

- 1) Se debe realizar un análisis de 2° orden si

$\lambda_m = \frac{k l_u}{r} > 100$

El reglamento no impone un valor máximo de esbeltez
- 2) Se puede ignorar los efectos de 2° orden si se cumple:

$\lambda_m = \frac{k l_u}{r} \leq 22$

Las solicitaciones debidas a las deformaciones son despreciables. Se verifica ELU de agotamiento a flexocompresión con las solicitaciones de 1° orden.
- 3) En todos los demás casos, se deben considerar los efectos de 2° orden. En INDESPLAZABLES, se amplifican los **momentos extremos** de la columna.

Momentos amplificados

$$\begin{cases} M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \\ M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \end{cases}$$

Si un elemento individual comprimido verifica la siguiente expresión

$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c A_g}}}$

Se supone que en esta columna el momento máximo no ocurrirá en los nudos sino en algún punto intermedio. Ésto es raro que suceda pero puede pasar. En este caso, se utilizan las expresiones de amplificación especificadas para indesplazables. ($C_m \neq 1$)

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 20

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Desplazables

Momentos amplificados $\left\{ \begin{array}{l} M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \\ M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \end{array} \right.$ SUMATORIA DE EFECTOS!

M_{1ns} } Son los momentos extremos mayorados **debidos a cargas que no originan desplazamiento lateral apreciable**, y calculados mediante un análisis elástico de primer orden del pórtico. (No es necesario amplificarlos)

M_{2ns} }

$\delta_s M_{1s}$ } Son los **momentos amplificados por efecto del desplazamiento lateral** P-Δ

$\delta_s M_{2s}$ }

Pueden determinarse de 3 maneras distintas:

1. Análisis de 2° orden
2. Método directo P-Δ
3. Factor de amplificación de momentos por desplazamiento lateral

Nota: Siempre se deben verificar todos los estados de cargas a ser considerados. Se debe dimensionar las armaduras necesarias para cada estado, y adoptar la mayor. Además de los estados de cargas que incluyen cargas horizontales, se debe verificar la resistencia y estabilidad de la estructura para cargas gravitatorias mayoradas.

Si las deformaciones por torsión son importantes, debería utilizarse un análisis de segundo orden 3D.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 21

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

MÉTODO P-Δ ITERATIVO

$\delta_s M_{1s}$ } Pueden determinarse de 3 maneras distintas:

$\delta_s M_{2s}$ }

1. Análisis de 2° orden
2. Método directo P-Δ
3. Factor de amplificación de momentos por desplazamiento lateral

Vigas 0.35 lg
Columnas 0.70 lg
Areas 1.00 Ag

Figura 9.17 - NILSON-WINTER

1) cálculo 1° orden → Δ₀

2) Se calcula el sistema con cargas horizontales incrementadas → Δ₁

i) Se calcula el sistema con cargas horizontales incrementadas → Δ_i
hasta que Δ_i - Δ_{i-1} < α

Debe ser $\frac{\Delta}{\Delta_0} \leq 2.50$

ATENCIÓN: Si da mayor que 2.5, debe rigidizarse el pórtico (redimensionar las columnas)

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 22

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Desplazables

1° orden

Ref. Clases de HI
ING. ANÍBAL MANZELLI

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 23

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

1 orden

Ref. Clases de HI
ING. ANÍBAL MANZELLI

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 24

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I	$\delta_s M_{1s}$ $\delta_s M_{2s}$	Pueden determinarse de 3 maneras distintas: 1. Análisis de 2° orden 2. Método directo P-Δ 3. Factor de amplificación de momentos por desplazamiento lateral	MÉTODO P-Δ DIRECTO
	<p style="font-size: small;">Vigas 0.35 lg Columnas 0.70 lg Areas 1.00 Ag</p> <p style="font-size: small;">1) cálculo 1° orden → Δ₀</p>	$\delta_s M_s = \frac{M_s}{1-Q} \geq M_s$ $Q = \frac{\sum P_u \Delta_o}{V_{us} l_c} \leq 0.60$ <p style="text-align: right;">Índice de estabilidad</p> <p>ATENCIÓN: - Si δ_s da mayor que 1.5, usar métodos 1 o 3</p>	<p>Figura 9.17 - NILSON-WINTER</p>
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte			Lámina 25

FIUBA - Depto. Construcciones y Estructuras 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I	Dimensionamiento de columnas de Pórticos Desplazables		
	$\delta_s M_{1s}$ $\delta_s M_{2s}$	Son los momentos amplificados por efecto del desplazamiento lateral Pueden determinarse de 3 maneras distintas: 1. Análisis de 2° orden 2. Método directo P-Δ 3. Factor de amplificación de momentos por desplazamiento lateral	
	Factor de amplificación de momentos para pórticos Desplazables	$1.00 \leq \delta_{ns} = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \leq 2.50$	
	$\sum P_u$: Sumatoria de todas las cargas verticales mayoradas en un piso $\sum P_c$: Sumatoria de todas las cargas críticas de pandeo de todas las columnas que resisten el desplazamiento lateral de un piso.	$P_{c,i} = \pi^2 \frac{(EI)_i}{(k_i l_{u,i})^2}$	
	ATENCIÓN: - Si δ _{ns} da menor que 1, se adopta 1. - Si δ _{ns} da mayor que 2.5, debe rigidizarse el pórtico (redimensionar las columnas)		
ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte			Lámina 26

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
74.01 y 94.01 - HORMIGON I

Dimensionamiento de columnas de Pórticos Desplazables

Si la columna es muy esbelta con alta carga axial, el máximo momento podría ocurrir entre extremos.

$$\frac{l_u}{r} > \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f'_c A_g}}}$$

Ref. Clases de HI
ING. ANIBAL MANZELLI

$M_1 = M_{1ns} + \delta_2 M_{1c}$

$M_2 = M_{2ns} + \delta_2 M_{2c}$

$M_c = \delta_{ns} M_2$

$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}}$

$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.40$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte
Lámina 27

No nos olvidemos de Dimensionar a CORTE !!!

$$V_n = V_c + V_s \quad V_u \leq \phi(V_n) = \phi(V_c + V_s) \quad \text{siendo } \phi = 0.75$$

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

$$N_u \text{ compresión} \Rightarrow \begin{cases} V_c = \lambda \left(1 + \frac{N_u}{14 A_g} \right) \frac{1}{6} \sqrt{f'_c} b_w d \\ \text{o} \\ V_c = \left(\sqrt{f'_c} + 120 \rho_w \frac{V_u d}{M_m} \right) \frac{1}{7} b_w d \leq 0.30 \sqrt{f'_c} b_w d \sqrt{1 + \frac{0.3 N_u}{A_g}} \end{cases}$$

$$\text{siendo } M_m = M_u - N_u \left(\frac{4h - d}{8} \right)$$

$$\sqrt{f'_c} \leq 8.30 \text{ MPa}$$

N_u : esfuerzo axial mayorado, normal a la sección transversal, que se produce simultáneamente con V_u . Se debe considerar **positivo para compresión**.
 A_g área total o bruta de la sección.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte
Lámina 28

Compresión + Flexión Biaxial

TIENE QUE HABER ARMADURA EN LAS DOS CARAS

Flexión en dos direcciones

Estructuras de HªAª--F.
Leonhardt-Tomo I

SUPERFICIE DE INTERACCIÓN
Compresión con Flexión en dos direcciones

Mac Gregor, J. "REINFORCED CONCRETE - Mechanics and Design" - Fig. 11-32

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 2º Parte
Lámina 29

Compresión + Flexión Biaxial

Puede resolverse:

1. Mediante un análisis iterativo planteando equilibrio y compatibilidad
2. Mediante métodos simplificados.

Por ej. el **Método de la Carga Recíproca de Bresler**

$$\frac{1}{\phi P_n} = \frac{1}{\phi P_{nx}} + \frac{1}{\phi P_{ny}} - \frac{1}{\phi P_{no}}$$

válido si $\phi P_n \geq 0.10 \phi P_{no}$

También es iterativo!!!

- a- Se supone una cuantía
- b- Se calcula ϕP_{no}

$$\phi P_{n,o} \begin{cases} \text{estribos:} \\ 0.80 \phi P_o = 0.80 \cdot 0.65 P_o \\ \text{zunchos:} \\ 0.85 \phi P_o = 0.85 \cdot 0.75 P_o \end{cases}$$

$$P_o = k_3 f'_c (A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO - 2º Parte
Lámina 30

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

c- Para Mux, se determina ϕP_{nx}

$\frac{\phi P_n e}{A_g h} = \frac{\phi M_x}{b h^2} [MPa]$

d- Para Muy, se determina ϕP_{ny}

$\frac{\phi P_n e}{A_g h} = \frac{\phi M_y}{b h^2} [MPa]$

e- Por último, se despeja ϕP_n y se verifica

$$\phi P_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{\phi P_{nx}} + \frac{1}{\phi P_{ny}} - \frac{1}{\phi P_{no}} \right)} \geq P_u$$

COLUMNAS ESBELTAS FLEXOCOMPRESIDAS – CIRSOC 201-2005:
 10.11.6. Para elementos comprimidos solicitados a flexión, respecto de ambos ejes principales, **el momento respecto de cada eje debe ser amplificado en forma separada**, sobre la base de las condiciones de restricción correspondientes a dicho eje.

ELU DE INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO – 2° Parte

Lámina 31

FIUBA – Depto. Construcciones y Estructuras
 74.01 y 94.01 - HORMIGÓN I

**FIN –
 ESTADO LÍMITE ÚLTIMO DE
 INESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO
 Parte 2**

GRACIAS POR SU ATENCIÓN !!!